Corrigé de quelques exercices sur les variables aléatoires

Exercice 6. :

Soient X une variable aléatoire (discrète) réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction convexe sur un intervalle contenant $X(\Omega)$. On suppose que X et $f(X)$ sont d'espérance finie.
Montrer que l'on a $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$.
Lorsque de plus f est strictement convexe, que signifie l'égalité $f(E(X)) = E(f(X))$?

Notons I l'intervalle de définition de la fonction f : on a $X(\Omega) \subset I$.

Supposons, dans un premier temps que $E(X)$ est un point intérieur à I. Selon l'exercice $16.$ sur les fonctions convexes, la fonction f est dérivable à droite et à gauche en $E(X)$ avec $f'_g(E(X)) \leqslant f'_d(E(X))$. Alors tout réel α appartenant à $\left[f'_g(E(X)), f'_d(E(X))\right]$ est tel que

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant \alpha(x - E(X)) + f(E(X))$$

Fixant un tel réel $\alpha,$ on peut écrire

$$f(X) \geqslant \alpha(X - E(X)) + f(E(X))$$

Par croissance et linéarité de l'espérance (les espérances des variables aléatoires X et $f(X)$ sont supposées exister ici), on obtient

$$E(f(X)) \geqslant \alpha E(X - E(X)) + f(E(X)) \qquad \text{ou encore} \qquad E(f(X)) \geqslant f(E(X))$$

Supposons, dans un second temps, que $E(X)$ est une extrémité de $I,$ sans perte de généralité son maximum. On a alors $X \leqslant E(X)$, ou encore $X - E(X) \leqslant 0.$ Comme la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée, cela signifie que X est constante, égale à $E(X)$, presque sûrement. Notant $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = E(X)\}$, l'événement A est presque certain et ainsi, selon le théorème de transfert, on a

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x) = \sum_{x \in A} f(x) P(X = x) = \sum_{x \in A} f(E(X)) P(X = x) = f(E(X))$$

Ce qui précède est une preuve de l'inégalité de Jensen.

Enfin, supposons f strictement convexe. Supposons que X n'est pas constante presque sûrement. Avec les notations précédentes, la variable aléatoire $f(X) - f(E(X)) - \alpha(X - E(X))$ est positive, d'espérance nulle donc nulle presque sûrement. Or si x est un élément de $X(\Omega)$, distinct de $E(X)$ et tel que $P(X = x) > 0,$ on a (par stricte convexité de f)

$$f(x) - f(E(X)) > \alpha(x - E(X))$$

ce qui entraîne (à nouveau grâce au théorème de transfert)

$$E(f(X)) > f(E(X))$$

Par la contraposée, on en déduit que, si f est strictement convexe et $f(E(X)) = E(f(X))$, la variable aléatoire X est constante presque sûrement.

Exercice 9. :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi centrées, à valeurs dans $[-1, +1]$.

Etablir la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{ch} x \leqslant \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.

En déduire : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [-1, +1],\ \exp(\lambda x) \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right) + x \operatorname{sh} \lambda.$

Montrer que si X est une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1,+1]$, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ E\left(e^{\lambda X}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \qquad E\left(e^{-\lambda X}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

Montrer que, si X est une variable aléatoire discrète à valeurs réelles, on a
$\forall (a,\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ P(X \geqslant a) \leqslant e^{-\lambda a} E\left(e^{\lambda X}\right)$ (*inégalité de Chernov*).

Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}_+,\ P\left(\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant a\right) \leqslant 2\exp\left(-\dfrac{a^2}{2}\right)$.

Une astuce (à retenir) pour répondre à la première question est d'utiliser le développement en série entière des deux fonctions concernées. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

et il n'est pas difficile de vérifier que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n n! \leqslant (2n)!$. On en déduit donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{ch} x \leqslant \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Pour répondre à la question suivante, on peut penser à exploiter la convexité de la fonction $\exp$. Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times [-1,+1]$. Ecrivons

$$\lambda x = \frac{1+x}{2}\lambda + \frac{1-x}{2}(-\lambda)$$

Comme $\dfrac{1+x}{2}$ et $\dfrac{1-x}{2}$ sont deux réels positifs ou nuls de somme égale à 1, la convexité de la fonction $\exp$ ainsi que le résultat de la question précédente donnent

$$\exp(\lambda x) \leqslant \frac{1+x}{2} e^{\lambda} + \frac{1-x}{2} e^{-\lambda}$$

ou encore $\exp(\lambda x) \leqslant \operatorname{ch}(\lambda) + x \operatorname{sh}(\lambda)$ puis $\exp(\lambda x) \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right) + x \operatorname{sh} \lambda$.

Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1,+1]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Signalons que les deux variables aléatoires $e^{\lambda X}$ et $e^{-\lambda X}$ sont bornées et, par conséquent, ont une espérance. D'après la question précédente, on a

$$\exp(\lambda X) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + X \operatorname{sh} \lambda$$

Par croissance de l'espérance et, comme X est centrée, on trouve $E\left(e^{\lambda X}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$. Comme $-X$ vérifie les mêmes hypothèses que X, on en déduit $E\left(e^{-\lambda X}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$.

Soit X est une variable aléatoire discrète à valeurs réelles, et soit $(a,\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. En remarquant l'égalité

$$\{X \geqslant a\} = \left\{e^{\lambda X} \geqslant e^{\lambda a}\right\}$$

l'inégalité de Markov s'écrit

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E\left(e^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda a}}$$

ou encore

$$P(X \geqslant a) \leqslant e^{-\lambda a} E\left(e^{\lambda X}\right)$$

Soit $(n,a,\lambda)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$. On commence par remarquer que l'on a

$$\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i\right|\geqslant a\right\}=\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\geqslant\frac{a}{\sqrt{n}}\right\}\biguplus\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-X_i)\geqslant\frac{a}{\sqrt{n}}\right\}$$

Par hypothèse, la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ est centrée, à valeurs dans $[-1,+1]$. On peut donc lui appliquer l'inégalité précédente pour obtenir $P\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\geqslant\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)\leqslant\exp\left(-\lambda\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)E\left(\exp\left(\dfrac{\lambda}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)$.

Par indépendance des variables aléatoires $X_1,X_2,\ldots,X_n$, donc des variables aléatoires $\exp\left(\dfrac{\lambda}{n}X_1\right),\ldots,\exp\left(\dfrac{\lambda}{n}X_n\right)$ on obtient

$$E\left(\exp\left(\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)=E\left(\prod_{i=1}^n\exp\left(\frac{\lambda}{n}X_i\right)\right)=\prod_{i=1}^n\left(E\left(\exp\left(\frac{\lambda}{n}X_i\right)\right)\right)$$

Enfin, une inégalité obtenue précédemment donne $\forall i\in[\![1,n]\!],\ E\left(\exp\left(\dfrac{\lambda}{n}X_i\right)\right)\leqslant\exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2n^2}\right)$ puis

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\geqslant\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\leqslant\exp\left(-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}}+\frac{\lambda^2}{2n}\right)$$

De la même façon, les variables aléatoires $-X_1,-X_2,\ldots,-X_n$ vérifiant les mêmes hypothèses que $X_1,X_2,\ldots,X_n$, on obtient

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-X_i)\geqslant\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\leqslant\exp\left(-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}}+\frac{\lambda^2}{2n}\right)$$

Finalement

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i\right|\geqslant a\right)\leqslant 2\exp\left(-\lambda\frac{a}{\sqrt{n}}+\frac{\lambda^2}{2n}\right)$$

Pour conclure, on peut optimiser la majoration obtenue à l'aide d'une étude de variations de fonction ou remplacer (intuition) λ par $a\sqrt{n}$ pour aboutir à

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i\right|\geqslant a\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)$$

Exercice 11. :

Soient $X_1,X_2,\ldots,X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la même loi.
On pose $\forall\omega\in\Omega,\ R_n(\omega)=\operatorname{card}(\{X_1(\omega),X_2(\omega),\ldots,X_n(\omega)\})$.
Montrer que l'on a : $\forall a\in\mathbb{N},\ E(R_n)\leqslant a+nP(X_1\geqslant a)$.
Montrer que $E(R_n)=o(n)$ quand n tend vers l'infini.
On suppose que X_1 a une espérance finie. Montrer que $E(R_n)=o(\sqrt{n})$ quand n tend vers l'infini.

Soit $a\in\mathbb{N}$. Le résultat demandé est immédiat si $a\geqslant n$, puisque $R_n\leqslant a$.
On peut donc supposer $a<n$. Comme les variables aléatoires $X_1,X_2,\ldots,X_n$ suivent la même loi, on a

$$nP(X_1\geqslant a)=\sum_{k=1}^n P(X_k\geqslant a)=E\left(\sum_{k=1}^n 1_{\{X_k\geqslant a\}}\right)$$

Pour conclure, il suffit de prouver l'inégalité $R_n \leqslant a + \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k \geqslant a\}}$. Soit $\omega \in \Omega$. A renumérotation près, on a

$$\exists j \in [\![1, n]\!] : \begin{cases} X_1(\omega) < a, \ldots, X_j(\omega) < a \\ X_{j+1}(\omega) \geqslant a, \ldots, X_n(\omega) \geqslant a \end{cases}$$

Avec ces notations, on a alors

$$\begin{array}{rcl} R_n(\omega) & = & \operatorname{card}(\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} \cap [\![0, a-1]\!]) + \operatorname{card}(\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} \cap \mathbb{N} \cap \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant a\}) \\ & \leqslant & a + n - j \end{array}$$

ou encore $R_n(\omega) \leqslant a + \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k \geqslant a\}}(\omega)$. D'où le résultat, qui reste valable avec a réel positif (en remplaçant a par $\lfloor a \rfloor$ dans le raisonnement précédent).

Remplaçons a par $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ dans l'inégalité précédente. La continuité décroissante de P donne

$$\lim_{n \to \infty} P\left(X_1 \geqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_1 \geqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}\right) = P(X_1 = +\infty) = 0$$

car X_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On en déduit le résultat voulu.

Supposons de plus que X_1 possède une espérance finie. Selon un exercice (numéro 39 des feuilles) sur les séries, la série $\sum P(X_1 \geqslant n)$ converge puis, comme la suite $(P(X_1 \geqslant n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, un autre exercice sur les séries (numéro 37 des feuilles) donne $P(X_1 \geqslant n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant le premier résultat avec $a = \lfloor \varepsilon \sqrt{n} \rfloor$, on peut écrire

$$E(R_n) \leqslant \lfloor \varepsilon \sqrt{n} \rfloor + nP\left(X_1 \geqslant \lfloor \varepsilon \sqrt{n} \rfloor\right)$$

Par définition d'un o, on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow P\left(X_1 \geqslant \lfloor \varepsilon \sqrt{n} \rfloor\right) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\lfloor \varepsilon \sqrt{n} \rfloor}$$

On fixe un tel n_0. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow E(R_n) \leqslant 2\varepsilon \sqrt{n}$$

d'où le résultat voulu.

Exercice 25. :

Soit $p \in]0, 1[$. On répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire au cours de laquelle un évènement A se réalise, à chaque fois, avec une probabilité égale à p. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première réalisation de l'évènement A et Y la variable aléatoire égale au rang de sa deuxième réalisation.

Déterminer la loi du couple (X, Y) et les lois marginales de X et de Y.

Montrer que X et Y ont une espérance et une variance et les calculer.

Après avoir justifié son existence calculer $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = m\}$.

Pour tout entier naturel non nul n, notons S_n l'événement " A est réalisé lors de la n^{me} expérience" et E_n l'événement " A n'est pas réalisé lors de la n^{me} expérience".

Selon la réalisation de l'expérience, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $Y(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$.

Déterminons la loi conjointe de (X, Y). Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})$ et considérons l'événement $\{(X, Y) = (n, m)\}$.

Ou bien $m \leqslant n$ et alors $\{(X,Y)=(n,m)\}=\emptyset$.

Ou bien $m>n$. Dans ce cas

$$\{(X,Y)=(n,m)\}=E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}\cap S_n\cap E_{n+1}\cap\ldots\cap E_{m-1}\cap S_m$$

puis, par indépendance des événements, on obtient

$$P\left((X,Y)=(n,m)\right)=p^2\left(1-p\right)^{m-2}$$

Par construction, X suit la loi géométrique de paramètre p, à savoir $\mathcal{G}\left(p\right)$ (ou presque puisque $+\infty\in X\left(\Omega\right)$).

Ensuite, la famille $\left(\{X=n\}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant un système quasi-complet d'événements, pour tout m appartenant à $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on a

$$P\left(Y=m\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}P\left(X=n,Y=m\right)=\sum_{n=1}^{m-1}p^2\left(1-p\right)^{m-2}=\left(m-1\right)p^2\left(1-p\right)^{m-2}$$

Ayant $X\sim\mathcal{G}\left(p\right)$, le cours donne

$$E\left(X\right)=\frac{1}{p}\qquad V\left(X\right)=\frac{1-p}{p^2}$$

Ensuite calculons la fonction génératrice de Y. La série entière $\sum_{m\geqslant 2}P\left(Y=m\right)t^m$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{1-p}$ (strictement plus grand que 1). En outre

$$\forall t\in\left]-\frac{1}{1-p},+\frac{1}{1-p}\right[,\ G_Y\left(t\right)=\sum_{m=2}^{+\infty}P\left(Y=m\right)t^m=\left(pt\right)^2\sum_{m=2}^{+\infty}\left(m-1\right)\left(\left(1-p\right)t\right)^{m-2}=\frac{\left(pt\right)^2}{\left(1-\left(1-p\right)t\right)^2}$$

Notamment G_Y est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{1-p},+\frac{1}{1-p}\right[$, notamment à des dérivées de tout ordre en 1, ce qui assure l'existence de moments de tout ordre de la variable aléatoire Y, en particulier de son espérance et sa variance.

Le calcul donne

$$\forall t\in\left]-\frac{1}{1-p},+\frac{1}{1-p}\right[,\ G_Y'\left(t\right)=\frac{2p^2t}{\left(1-\left(1-p\right)t\right)^3}\qquad G_Y''\left(t\right)=\frac{2p^2\left(1+\left(1-p\right)2t\right)}{\left(1-\left(1-p\right)t\right)^4}$$

Les formules du cours donnent alors

$$E\left(Y\right)=G_Y'\left(1\right)=\frac{2}{p}\qquad V\left(Y\right)=G_Y''\left(1\right)+G_Y'\left(1\right)-G_Y'\left(1\right)^2=2\frac{1-p}{p^2}$$

Ces valeurs s'interprètent assez bien puisque la loi géométrique est une loi sans mémoire.

Commençons par justifier que la variable aléatoire XY a une espérance. Selon le théorème de transfert, il s'agit de vérifier la sommabilité de la suite double $\left(nmP\left((X,Y)=(n,m)\right)\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times(\mathbb{N}^*\setminus\{1\})}$. Soit $m\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. La série $\sum_{n\geqslant 1}nmP\left((X,Y)=(n,m)\right)$ converge, puisque son terme général est nul à partir d'un certain rang. De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nmP\left(X=n,Y=m\right)=\sum_{n=1}^{m-1}nmp^2\left(1-p\right)^{m-2}=\frac{m^2\left(m-1\right)}{2}p^2\left(1-p\right)^{m-2}$$

Ensuite la série $\sum_{m\geqslant 2}\frac{m^2\left(m-1\right)}{2}p^2\left(1-p\right)^{m-2}$ converge puisque, par exemple, la série entière $\sum_{m\geqslant 2}m^2\left(m-1\right)x^{m-2}$ a un rayon de convergence égal à 1.

Par conséquent, la suite double est sommable et le théorème de sommation par paquets (que l'on aurait ou utiliser directement puisque cette suite double est positive ou nulle) permet de pour suivre le calcul :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times(\mathbb{N}^*\setminus\{1\})} nmP((X,Y)=(n,m)) = \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{m^2(m-1)}{2}p^2(1-p)^{m-2} \\ &= \frac{p^2(1-p)}{2}\sum_{m=2}^{+\infty}(m(m-1)(m-2)+2m(m-1))(1-p)^{m-2} = \cdots = \frac{3-p}{p^2} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On a

$$\forall n \in [\![1, m-1]\!],\ P_{\{Y=m\}}(X=n) = \frac{P(X=n, Y=m)}{P(Y=m)} = \frac{p^2(1-p)^{m-2}}{(m-1)p^2(1-p)^{m-2}} = \frac{1}{m-1}$$

En conclusion la loi conditionnelle sachant $\{Y=m\}$ est la loi uniforme sur $[\![1, m-1]\!]$, résultat à nouveau aisément interprétable.

Exercice 30. :

Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \alpha_n = E(Y_n) \qquad \beta_n = E(Z_n)$$

Etablir la monotonie des deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Pour tout entier naturel non nul n, exprimer α_n en fonction de n.
Déterminer la limite de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis un équivalent de β_n.

Les suites $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont clairement monotones, respectivement décroissantes et croissantes. Par conséquent il en est de même des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (éventuellement à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour l'étude de telles variables aléatoires, il est judicieux d'exprimer les fonctions de répartition (notion pas au programme de MP) des variables aléatoires Y_n et Z_n.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Ayant $\{Y_n > k\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{X_i > k\}$, par indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on a

$$P(Y_n > k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > k) = \prod_{i=1}^{n}(1-p)^k = (1-p)^{kn}$$

puis $P(Y_n = k) = P(Y_n > k-1) - P(Y_n > k) = (1-p)^{(k-1)n}(1-(1-p)^n)$.

Ensuite la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(Y_n = k)$ étant convergente (à nouveau parce que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} kx^{k-1}$ est égal à 1), la variable aléatoire Y_n a une espérance et

$$\alpha_n = E(Y_n) = (1-(1-p)^n)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{(k-1)n} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\alpha_n = \frac{1}{1-(1-p)^n}}$$

Procédons de la même manière pour la variable aléatoire Z_n. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Ici $\{Z_n \leqslant k\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}$ et ainsi

$$P(Z_n \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant k) = \left(1-(1-p)^k\right)^n$$

puis

$$\begin{aligned} P(Z_n = k) &= P(Z_n \leqslant k) - P(Z_n \leqslant k-1) = \left(1-(1-p)^k\right)^n - \left(1-(1-p)^{k-1}\right)^n \\ &= \left(1-\left(1-(1-p)^{k-1}\right)^n\right) - \left(1-\left(1-(1-p)^k\right)^n\right) \end{aligned}$$

cette dernière écriture a pour but de préparer la justification de l'existence de l'espérance de Z_n. En effet, on

$$1-\left(1-(1-p)^{k-1}\right)^n \underset{k\to\infty}{\sim} n(1-p)^{k-1}$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} k\left(1-\left(1-(1-p)^{k-1}\right)^n\right)$ puis celle de la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(Z_n = k)$ (différence de séries convergentes), donc l'existence de l'espérance de Z_n.

En vue d'alléger certains calculs, pour tout entier naturel k, notons $a_{n,k} = 1-\left(1-(1-p)^k\right)^n$. Pour tout entier naturel non nul N, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} kP(Z_n = k) &= \sum_{k=1}^{N} k\left(a_{n,k-1} - a_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{N} ka_{n,k-1} - \sum_{k=1}^{N} ka_{n,k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\,a_{n,k} - \sum_{k=1}^{N} ka_{n,k} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} - Na_{n,N} \end{aligned}$$

L'équivalent précédent donne $Na_{n,N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent

$$\beta_n = E(Z_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1-\left(1-(1-p)^k\right)^n\right)$$

Remarque : le calcul de α_n et de β_n si l'on avait pu utiliser sans démonstration la formule (au programme de PSI)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$$

pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (vue en exercice avec CNS d'existence de l'espérance de X).

Pour obtenir un équivalent de β_n quand n tend vers l'infini, on peut effectuer une comparaison série-intégrale. La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1-\left(1-(1-p)^t\right)^n \end{array}$ est continue (par morceaux), décroissante et positive. On en déduit (outre la convergence de l'intégrale apparaissant ci-dessous) l'encadrement

$$\int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-(1-p)^t\right)^n\right) dt \leqslant \beta_n \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-(1-p)^t\right)^n\right) dt$$

La formule de Bernoulli fournit

$$\int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-(1-p)^t\right)^n\right) dt = \int_0^{+\infty} (1-p)^t \sum_{j=0}^{n-1} \left(1-(1-p)^t\right)^j dt$$

et, après avoir vérifié la convergence des intégrales apparaissant ci-dessous (quasiment "à la volée" puisqu'on explicite des primitives des fonctions intégrées), on en tire

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-(1-p)^t\right)^n\right)dt &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{-1}{\ln(1-p)}\left[\frac{\left(1-(1-p)^t\right)^{j+1}}{j+1}\right]_0^{+\infty}\\ &= -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}\end{aligned}$$

Reconnaissant une somme partielle de la série harmonique, on aboutit à

$$\boxed{\beta_n \sim -\frac{\ln(n)}{\ln(1-p)}}$$

(notamment $\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$).
